А. А. ЛАРИН ©

Тренировочные варианты 2012/13, часть С

Сайт Александра Ларина

Содержание

Вариант 1 2
Вариант 2 3
Вариант 3 4
Вариант 4 5
Вариант 5 6
Вариант 6 7
Вариант 7 8
Вариант 8 9
Вариант 9 10
Вариант 10 11
Вариант 11 12
Вариант 12 13
Вариант 13 14
Вариант 14 15
Вариант 15 16
Вариант 16 17
Вариант 17 18
Вариант 18 19
Вариант 19 20
Вариант 20 21
Вариант 21 22
Вариант 22 23
Вариант 23 24
Вариант 24 25
Вариант 25 26
Вариант 26 27
Вариант 27 28
Вариант 28 29
Вариант 29 30
Вариант 30 31
Вариант 31 32
Вариант 32 33
Вариант 33 34
Вариант 34 35
Вариант 35 36
Вариант 36 37
Вариант 37 38
Вариант 38 39
Вариант 39 40

Вариант 1

C1 а) Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos^{-2} x} + 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{4} + 3 \cdot (1 - \sin^2 x) + \frac{\sin x}{2}\right).$$

б) Найдите все корни на промежутке $[2\pi, 13\pi/3]$.

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны, точка K – середина B_1C_1. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью B_1KP, где точка P – середина AA_1.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4(x^2 + x) \leqslant 3|2x + 1| - 3, \\ \left(\sqrt{25 - x} + 2 + \sin 2x\right)\left(25^x - 5^{x + \log_5 2}\right) \leqslant 0. \end{cases}$$

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC, с катетами AB и BC $(AB = 5, BC = 12)$. Пусть точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Прямая, проходящая через точку I, параллельна одной из сторон треугольника ABC и пересекает две другие стороны в точках K и P. Найдите длину отрезка KP.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\left|x - a^2\right| - \sqrt{x - \frac{1}{2}} \geqslant 0$$

выполняется при любом допустимом значении x.

C6 Даны натуральные числа a, b и c такие, что $a > b > c$. Среднее арифметическое этих чисел делится на 13.

а) Найдите наименьшую сумму $a + b + c$ такую, что она является квадратом натурального числа.

б) Найдите наибольшее значение числа c, если $a = 32$, и сумма $a + b + c$ имеет наименьшее значение.

в) Найдите наименьшее число b, если известно, что числа c, b и a в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию с разностью n.

г) Если известно, что числа c, b и a в указанном порядке составляют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью n, найдите наименьшее n, при котором число c будет наименьшим, и все члены данной арифметической прогрессии будут являться квадратами натурального числа.

Вариант 2

C1 а) Дано уравнение

$$\sqrt{(\sin x\cos 3x+\sin 3x\cos x)\left(\cos 3x\cos\left(3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)\right)+1}=1.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right]$.

C2 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой равны a. Найдите угол между прямыми A_1B и AC_1, если сумма длин всех сторон обеих оснований равна AA_1.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{3^x-9}{10\cdot 3^{x+1}-3^4-3^{2x}}<0 \\ \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2x}+5+2\sqrt{6}\leqslant\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x}\left(\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3}+\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$

C4 Дан треугольник ABC, где $BA=5$, $BC=8$. В треугольник вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке P. Известно, что $BP=3$. Найдите площадь треугольника BMP, где M – точка касания окружности со стороной треугольника ABC.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{3}|x|+2\sqrt{3} \\ y=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

будут иметь три общие точки с кривой, заданной уравнением $x^2+y^2-a^2=4(\sqrt{3}y-1)/3$.

C6 В лицее №4 оценки в аттестат ставят по успеваемости за 9 и 11 классы. Если оценки отличаются на 1 балл, то ставят в пользу ученика, если более, чем на 1 балл, то ставят среднее. Известно, что в 9 и 11 классах у Лены было 5 предметов, причем среднее арифметическое всех оценок в 9 классе равно 4.6, а среднее арифметическое всех оценок в 11 классе равно 4.8.

а) Могла ли Лена получить отличный аттестат?

б) Могла ли Лена закончить лицей с тройкой?

в) В спец.классе лицея n предметов. Если бы Лена там обучалась, и среднее арифметическое всех оценок за 9 класс оказалось равно 4.1, а за 11 класс - 4.9, то она стала бы отличницей. При каком наименьшем n это возможно?

Вариант 2 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 3

C1 Дано уравнение

$$3^{\operatorname{tg}^2 2x+\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\cdot 3^{(\sqrt{3}+1)\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+1} = 0.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни на промежутке $[\pi/3; 3\pi]$.

C2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 4. Пусть точка S лежит на стороне AB так, что $AS : SB = 1 : 3$. Найдите расстояние от точки S до плоскости CPD_1, где P – середина B_1C_1.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} |2-3x+x^2|-5 \leqslant 0, \\ 8,9x - x^2 + |x^2 - 8,9x + 19,5| > 19,5. \end{cases}$$

C4 Дан треугольник ABC, в котором $\angle ABC = \arccos(1/2)$. В треугольник вписана окружность, которая касается сторон AC, CB и BA в точках K, T и M соответственно. Прямая AT пересекает окружность в точке L, причем $AL = 2$. Найдите площадь треугольника, одна из сторон которого AT, а другая содержит точку касания окружностью треугольника ABC, если $AK = 4$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(x+1)^2 = \frac{x}{a} - 2$$

имеет не менее двух решений.

C6 Последовательность задана формулой $a_n = 5b + 3n$, где $n, b \in \mathbb{N}$.

а) Может ли число 15 являться членом последовательности?

б) Верно ли, что данная последовательность является бесконечной арифметической прогрессией?

в) Может ли последовательность являться геометрической прогрессией?

г) Могут ли три подряд идущих члена последовательности являться сторонами прямоугольного треугольника?

Вариант 3 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 4

C1 Дано уравнение

$$\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{5} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{25}} \cdot (5+\sqrt{3}).$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни на промежутке $[0; 3\pi]$.

C2 Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть точка K – середина A_1B_1. Найдите расстояние от точки D_1 до прямой KC.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{16-3x+2(x^3+1)-9x^2} \leqslant 6x - x^2 - 9, \\ 1 - \sqrt{15-9x+x^2} > 0. \end{cases}$$

C4 Две окружности касаются в точке O, причем радиус окружности с центром в точке O' больше, чем радиус окружности с центром в точке O''. Прямая $O'O''$ пересекает меньшую окружности в точке K (K отлично от O). Отрезок $O'K = a$. Прямая t касается большей окружности в точке P так, что угол $O''O'P$ – прямой. Отрезок $PK = b$. Найдите площадь треугольника $OO'P$.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + (a-1)x = a+2$$

имеет два действительных корня, сумма которых больше a.

C6 У Лены три набора, в каждом из которых одинаковое количество ручек (больше 1). У Юли несколько (больше 1) наборов ручек, по 5 штук в каждом.

а) При каком количестве наборов у Юли, количество всех ручек у Лены нечетно, если всего у девочек 105 ручек?

б) Можно ли разложить все ручки Юли и Лены в 12 наборов по 12 ручек в каждом?

в) Можно ли разложить все ручки Юли и Лены в k наборов по k ручек в каждом ($k > 3$)?

Вариант 4 (полный, онлайн). *Весь список*

Вариант 5

C1 Дано уравнение

$$\sin x \cdot \left(\sin x \cdot \cos^{-1} x + \frac{1}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \left(\sin x + \frac{1}{3} \cos x\right).$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни на промежутке $[-2\pi; 3\pi/2]$.

C2 Сфера с центром в точке O вписана в прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми B_1O и BK, где K – середина DC.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + \sqrt{3x^4 - 9x^2 + 1} - 9}{2 + |3x + 2x^3| + 3\sqrt{7x + 8x^4 + 9x^2}} \geqslant 0, \\ \sqrt{x - 6 + x^2} + \sqrt{9(x+2) + x^2} \leqslant 0. \end{cases}$$

C4 Дан треугольник ABC, в котором $AC = CB$, а синус угла C равен 1. Треугольник ABD – равнобедренный, с боковой стороной равной 10. Найдите площадь треугольника ABC.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$a + 2x + 5\sqrt{2x + 1} > -(2ax + 3)$$

выполняется для любого x, принадлежащего промежутку $[0; 1,5]$.

C6 Есть набор чисел $p_n = \dfrac{2n^2 + 4n - 16}{4(n-2)}$, где $p_n, n \in \mathbb{N}$. Число A имеет вид $A = \dfrac{a_i a_j}{[k]}$ $(A \in \mathbb{N})$, где a_i, a_j – различные числа p, k – среднее арифметическое всех чисел p, а $[x]$ – целая часть от числа x.

а) Найти наименьшее возможное и наибольшее возможное число A, если $1 \leqslant n \leqslant 10$.

б) Найдите наименьшее n, при котором число A больше 20.

в) Найдите при каком минимальном n выполняется равенство $A \cdot [k] = 40$.

Вариант 5 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 6

C1 Дано уравнение
$$\frac{\cos^2 x + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos^2 x} = \frac{\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}\cos x}.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни на промежутке $[-1; 3]$.

C2 Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат со стороной 1. На плоскости основания имеется квадрат $CDKM$. В этот квадрат вписана окружность, которая является основанием цилиндра с высотой, равной длине отрезка AA_1. Найдите расстояние от середины основания цилиндра до точки пересечения диагоналей параллелепипеда, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 2.

C3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} 9x^3 - 30x \leqslant \sqrt{20x^2}, \\ \sqrt{1+2x^2} - \sqrt{6x-2} \geqslant 0. \end{cases}$$

C4 В системе координат задана точка $M(x, y)$, $x > 0$, $y > 0$. Дана окружность с центром в точке M радиуса r, причем любая точка окружности имеет положительные координаты. Прямая, проходящая через точку $O(0,0)$ и через точку M, пересекает окружность в точках K и P, причем ордината точки K меньше, чем ордината точки P. Прямая, которая касается окружности в точке K, пересекает прямые $x = 0$ и $y = 0$ в точках A и B. Найдите площадь треугольника OKB.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} y - \left| 2\dfrac{a-1}{a} x \left(a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{2012}\right) \right| = 0, \\ y^2 - 50y = (12-x)(x+12) - 625. \end{cases}$$
имеет два решения.

C6 Дан прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами.

а) Могут ли стороны данного треугольника быть членами одной возрастающей геометрической прогрессии?

б) Докажите, что для любого натурального n большего 1, можно найти такие три числа, которые будет являться сторонами этого треугольника и членами одной арифметической прогрессии с разностью n.

Вариант 6 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 7

С1 Дано уравнение

$$f\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4},\quad \text{где}\quad f(t)=\frac{2t^2-t(\sqrt{2}+1)}{2}.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни на промежутке $\left(\frac{\pi}{3};\frac{13\pi}{4}\right]$.

С2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 5 см. Точка I движется по сторонам квадрата AA_1D_1D со скоростью 1 см/с, стартуя из точки A. Двигаясь в направлении AA_1D_1DA, точка I через 7 секунд остановилась. Найти угол между плоскостью ABD и плоскостью IMB_1, где M – середина CC_1.

С3 Решите систему:

$$\begin{cases} |2x-1|+|2x+1|\leqslant 3-2|x|,\\ 2x(x+1)+\dfrac{874}{875}>(x+1)^2-x\left(\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{25}\right).\end{cases}$$

С4 Дан прямоугольный треугольник MNK с катетами 5 и 12. Треугольник KNJ – равносторонний, причем точка J и точка M лежат по разные стороны от прямой NK. Найдите расстояние от центра вписанной в MNK окружности до центра вписанной в KNJ окружности.

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 19x^2+19y^2=1,\\ 2y-1\geqslant a-|x|.\end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

С6 В вершинах треугольника записано по натуральному числу, на каждой стороне – произведение чисел, записанных в её концах, а внутри треугольника – произведение чисел, записанных в его вершинах. Сумма всех семи чисел равна 1000. Какие числа записаны в вершинах треугольника?

Вариант 7 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 8

C1 Дано уравнение

$$2\sin 2x \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - \sqrt{3}\cos x + 1 = 0.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни на промежутке $[0;4]$.

C2 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите расстояние между прямыми AD_1 и A_1C_1.

C3 Решите систему:

$$\begin{cases} (\sqrt{4-x^2} - 2)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right) \geqslant 0, \\ \dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{3^x}{3^x - 2^x} \leqslant 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x. \end{cases}$$

C4 Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность, его диагонали KM и LN пересекаются в точке F, причем $KL = 8$, $MN = 4$, периметр треугольника MNF равен 9, площадь треугольника KLF равна $3\sqrt{15}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KNF.

C5 Найдите наименьшее значение a, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} a - 8\cos^2\dfrac{3y}{8} - 2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{3y}{8} = 2\cos^2 2x, \\ 2\pi(1+|x|)\cos 3y + |x|(\pi\sin^2 3y - 16 - 2\pi) = 0. \end{cases}$$

C6 Лужков и Батурина поворачивают с Рублевки на МКАД в разные стороны – Лужков – налево, Батурина – направо. За сколько минут каждый из них проезжает полный круг по МКАД, если известно, что Лужков тратит на это на 12 минут меньше Батуриной, при этом проезжая круг не быстрее 31 минуты. Время проезда одного круга измеряется целым числом минут и их седьмая встреча произошла снова на Рублевке.

Вариант 8 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 9

C1 Дано уравнение

$$\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \sin 2x.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни на промежутке $[-2\pi; -\pi/2]$.

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

C3 Решите систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x - 7\sqrt{x} + 10}{2 - \sqrt{x}} \geqslant \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3}, \\ \dfrac{\sqrt{20 - x^2 + x}}{2x - 3} \leqslant \dfrac{\sqrt{20 - x^2 + x}}{x - 6}. \end{cases}$$

C4 В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x + 2a\cos x + |2a + 1| - 2 = 0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

C6 Инспектор ДПС майор Худаков получил указание начальства останавливать те автомобили, трехзначный госномер которых n удовлетворяет следующим требованиям: если выписать все целые числа от 1 до n и посчитать количество записанных цифр, то получится число, записанное теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Сначала майор попробовал выполнять требуемые вычисления для каждого автомобиля в режиме реального времени мелом на асфальте, но мел скоро закончился. Помогите майору определить номера нужных автомобилей.

Вариант 9 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 10

C1 Дано уравнение

$$\sin^4 9x + \cos^7 15x \cdot \cos^2 9x = 1.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни на промежутке $[-2\pi; -\pi/2]$.

C2 Основанием пирамиды служит параллелограмм $ABCD$. Через сторону AB и середину K бокового ребра проведена плоскость. Найти отношение объемов получившихся частей.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x^5+1}{(x+1)^5} - \dfrac{11}{81} > 0, \\ \sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1. \end{cases}$$

C4 Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K, а срединный перпендикуляр к стороне AB – в точке M. Найдите $\angle DCK$, если известно, что $\angle AKB = \angle AMB$.

C5 При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = a$$

имеет решения?

C6 Губернатор Титькин решил организовать автобусное движение между деревнями Верхнее и Нижнее Гадюкино. Автобусы-экспрессы будут следовать из Нижнего Гадюкино в Верхнее без остановок круглосуточно с интервалом ровно 7 минут, останавливаться в конечном пункте на какое-то время и отправляться обратно, тратя на дорогу в одну сторону ровно 25 минут. При этом на конечных остановках не должно находиться более одного автобуса одновременно. Сколько автобусов потребуется купить губернатору?

Вариант 10 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 11

C1 Дано уравнение
$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos 2x}.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни на промежутке $[2\pi; 7\pi/2]$.

C2 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C и гипотенузой $2\sqrt{15}$. Найти расстояние от точки B до прямой A_1M, если точка M – середина ребра CC_1, которое равно $\sqrt{30}$.

C3 Решите систему неравенств
$$\begin{cases} x^{\log_2 x} \geqslant \dfrac{4}{x}, \\ \dfrac{3^{5x} - 3}{9^x - 30 \cdot 3^x + 81} < 0. \end{cases}$$

C4 Трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 6$ и $BC = 4$ и диагональю $BD = 7$ вписана в окружность. На окружности взята точка K, отличная от точки D, так, что $BK = 7$. Найдите длину отрезка AK.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{y+a} = 2x - x^2, \\ y + x^2 = 2x + a^2 \end{cases}$$
имеет ровно 4 различных решения.

C6 Найдите все целые значения n, для каждого из которых число $\log_{2n-1}(n^2+2)$ будет рациональным.

Вариант 11 (полный, онлайн).　　　　Весь список

Вариант 12

C1 Дано уравнение
$$\cos 3x = \sqrt{3}\sin 4x + \cos 5x.$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни на промежутке $[\pi/2; \pi]$.

C2 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 на ребрах BB_1 и CC_1 выбраны точки K и M соответственно так, что $BK : BB_1 = 1 : 3$, а $CM : CC_1 = 2 : 3$. Найти расстояние между прямыми A_1K и BM.

C3 Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \dfrac{6}{3^x - 1} < 3^x, \\ \sqrt{x^2 + 3x - 18} \leqslant \dfrac{6\sqrt{x^2 + 3x - 18}}{x + 2}. \end{cases}$$

C4 Найти высоту равнобедренного треугольника, проведенную к его боковой стороне, равной 2, если синус одного его угла равен косинусу другого.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых решением неравенства
$$|3 - 4x|\sqrt{x - x^2} \geqslant (2ax + 0,5 - a) \cdot |3 - 4x|$$
является отрезок длиной $0,5$.

C6 Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например 123456 – 612345), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[891870; 891899]$ могли получиться в результате сложения?

Вариант 12 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 13

C1 а) Решите уравнение
$$\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2}\cos x.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[1;6]$.

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны $\sqrt{2}$. Найдите угол между плоскостями BCD_1 и ABC_1.

C3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \left(\log_2 \dfrac{5x+4}{4x}\right)\sqrt{x^4-5x^2+4} > 0, \\ (3^x-1)\sqrt{x^2-4x+3} \leqslant 0. \end{cases}$$

C4 Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD – в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD. Найдите отношение площадей треугольника AOD и четырехугольника $ABCD$, если $OA = 12$, $OD = 8$, $CD = 2$.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} (5-2\sqrt{6})^x + (5+2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a-4)y = 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение.

C6 Несколько натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию, начиная с четного числа. Сумма нечетных членов прогрессии равна 33, четных – 44. Найдите эти числа.

Вариант 13 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 14

С1 а) Решите уравнение

$$\cos 6x \cdot \sin \frac{5x}{6} = 1.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[7; 50]$.

С2 К диагонали A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели перпендикуляры из середин ребер AB и AD. Найдите угол между этими перпендикулярами.

С3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{2x+3} x^2 < 1, \\ \sqrt{4 - x^2} + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \geqslant 0. \end{cases}$$

С4 В треугольнике ABC $AC = 12$, $BC = 5$, $AB = 13$. Вокруг этого треугольника описана окружность S. Точка D является серединой стороны AC. Построена окружность S_1, касающаяся окружности S и отрезка AC в точке D. Найдите радиус окружности S_1.

С5 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет ровно одно решение.

С6 В десятичной записи положительного числа поменяли местами цифры, стоящие на первом и третьем местах после запятой. При этом число увеличилось в 13 раз.

а) Какая цифра стояла на третьем месте после запятой в исходном числе?

б) Какое число получилось?

Вариант 14 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 15

C1 а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x\cos^2 4x + \cos^2 4x = 0.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-2\pi; \pi]$.

C2 Диагональ A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через вершины B и D. Найдите величину этого угла.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{1/x}\left(\dfrac{5}{2}x - 1\right) \geqslant -2, \\ \dfrac{(4^x - 12\cdot 2^x + 32)(x-1)}{\sqrt{x}-1} \geqslant 0. \end{cases}$$

C4 Точка B – середина отрезка AC, причем $AC = 6$. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся всех трех данных.

C5 При каких значениях a уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

C6 В школьной олимпиаде по математике участвовало 100 человек, по физике – 50 человек, по информатике – 48 человек. Когда каждого из учеников спросили, в скольких олимпиадах он участвовал, ответ «по крайней мере в двух» дали в два раза меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной», а ответ «в трех» – втрое меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одной». Сколько всего учеников приняло участие в этих олимпиадах?

Вариант 15 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 16

C1 а) Решите уравнение
$$\sqrt{3-\cos 2x-\sin 2x}=-2\sqrt{2}\sin x.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-2\pi; -\pi]$.

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S на сторонах AB и AC выбраны точки M и K соответственно так, что треугольник AMK подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $2/3$. На прямой MK выбрана точка E так, что $ME : EK = 7 : 9$. Найти расстояние от точки E до плоскости BSC, если сторона основания пирамиды равна 6, а высота пирамиды равна $\sqrt{6}$.

C3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} 4^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}}+3\cdot 6^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}}\geqslant 4\cdot 9^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}}, \\ \log_{1/3}|x-2|-\log_{2-x}3\leqslant 2. \end{cases}$$

C4 В окружности проведены хорды KL, MN, PS. Хорды KL, PS пересекаются в точке C, хорды KL, MN пересекаются в точке A, хорды MN и PS пересекаются в точке B, причем $AL=CK$, $AM=BN$, $BS=5$, $BC=4$. Найдите радиус окружности, если величина угла BAC равна 45°.

C5 При каких значениях a уравнение
$$(\sin x-\log_4 a)(\sin x-2+2a)=0$$
имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$?

C6 Даны 20 различных натуральных чисел, меньших 70. Докажите, что среди их попарных разностей найдутся четыре одинаковых.

Вариант 16 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 17

C1 а) Решите уравнение
$$\frac{6\cos^2 x + \cos x - 2}{(3\cos x + 2)\sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S, со стороной основания равной $4\sqrt{2}$ и боковым ребром 5 найти угол между прямой AB и плоскостью, проходящей через середины BC и DC и вершину S.

C3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \log_{x+5}(6-x)\cdot\log_{4-x}(x+3) \geqslant 0, \\ |2x-6|^{x+1} + |2x-6|^{-x-1} \leqslant 2 \end{cases}$$

C4 В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\cos\angle KLM = -1/3$. Найдите диагональ LN.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых все числа x из отрезка $[1;5]$ удовлетворяют неравенству
$$3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0.$$

C6 На постоялом дворе остановился путешественник, и хозяин согласился в качестве уплаты за проживание брать кольца золотой цепочки, которую тот носил на руке. Но при этом он поставил условие, чтобы оплата была ежедневной: каждый день хозяин должен был иметь на одно кольцо больше, чем в предыдущий. Замкнутая в кольцо цепочка содержала 11 колец, а путешественник собирался прожить ровно 11 дней, поэтому он согласился.

а) Какое наименьшее число колец он должен распилить, чтобы иметь возможность платить хозяину?

б) Из скольких колец должна состоять цепочка, чтобы путешественник мог прожить на постоялом дворе наибольшее число дней при условии, что он может распилить только n колец?

Вариант 17 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 18

С1 а) Решите уравнение
$$\frac{\cos 2x - \cos x + 1}{\sqrt{\sin 3x - \cos 2x}} = 0.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

С2 Точки K, P, M – середины ребер AD, DC и A_1B_1 соответственно куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямой AA_1 и плоскостью, проходящей через точку K перпендикулярно прямой MP.

С3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \dfrac{(\log_{x-1}(5-x))^2}{x^2-8x+15} \geqslant 0, \\ \left(4^{\lg x} + x^{\lg 4} - 128\right)\left(\dfrac{5^x-25}{3-2^x}\right)\left(\dfrac{(x-3)(1-x)}{|(x-3)(x-1)|} + \dfrac{1}{5}\sin 4x\right) \geqslant 0. \end{cases}$$

С4 Две окружности касаются внешним образом. Прямая касается первой окружности в точке M и пересекает вторую окружность в точках A и B. Найдите радиус первой окружности, если известно, что $AB = 12$, $MB = 6$, а радиус второй окружности равен 10.

С5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство
$$|3\sin^2 x + 2a\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + a| \leqslant 3.$$

С6 Требуется сделать набор гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 грамма до 55 граммов включительно даже в том случае, если некоторые гирьки потеряны (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую).

а) Необходимо подобрать 10 гирек, из которых может быть потеряна любая одна;

б) необходимо подобрать 12 гирек, из которых могут быть потеряны любые две.

(В обоих случаях докажите, что найденный Вами набор гирек обладает требуемыми свойствами.)

Вариант 18 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 19

C1 а) Решите уравнение

$$\frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 2x) - 1 = 2\sin 2x - 2\sin x - sin x \cdot \sin 2x.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$.

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S, точка M – середина ребра BS. Найти площадь сечения, проведенного через прямую AM параллельно одной из диагоналей основания, указанная диагональ не принадлежит сечению. Стороны основания пирамиды равны $6\sqrt{2}$, а высота пирамиды равна 9.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3^{(x+2)^2} + \dfrac{1}{27} \leqslant 3^{x^2-3} + 9^{2x+2}, \\ 2\log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}}\left(2^{x^2-1} - \dfrac{1}{4}\right) < \log_{\sqrt{2}} 31. \end{cases}$$

C4 Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении $1:3$.

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geqslant x - axy + y - 25x^2$$

выполняется для любых пар (x, y), таких, что $|x| = |y|$.

C6 Дана бесконечная последовательность чисел, в которой первый член равен 1, а каждый последующий в два раза меньше предыдущего.

а) Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна $1/7$?

б) Можно ли из данной последовательности выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма членов которой равна $1/5$?

Вариант 19 (полный, онлайн). *Весь список*

Вариант 20

C1 **а)** Решите уравнение

$$\cos 3x + \sin x \cdot \sin 2x = 2\cos^3 x + 2\operatorname{tg} x.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[-\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания равной $1+\sqrt{3}$ и высотой равной 2, проведено сечение через прямую BC, которое делит призму на 2 многогранника равных объемов. Найти площадь этого сечения.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^{\log_2 x} + x^2 < 8, \\ \log_{1/\log_2 x}\left(4x^2 - 20x + 22\right) < 0. \end{cases}$$

C4 Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20 градусов больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если ее диагональ равна 2.

C5 Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x+a-4| + \left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|} - |a-2|\right)\cdot|x-2| + \frac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a| \leqslant 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

C6 Можно ли из последовательности $1, 1/2, 1/3, \ldots$ выбрать (сохраняя порядок)

а) сто чисел,

б) бесконечную подпоследовательность чисел, из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих ($a_k = a_{k-2} - a_{k-1}$)?

Вариант 20 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 21

C1 а) Решите уравнение

$$\cos x - 2\sin x \cdot \sin 2x - 4\cos 2x - 4\sin^2 x = 0.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

C2 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник с острым углом A, равным 30 градусов. Найти площадь сечения призмы, проходящего через меньший катет нижнего основания и средину гипотенузы верхнего основания, если расстояние между основаниями призмы равно расстоянию от вершины A до искомого сечения и равно 6.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{11 \cdot 3^{x-1} - 31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geqslant 5, \\ \log_{x+2}\left(2x^2 + x\right) \leqslant 2. \end{cases}$$

C4 На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные 1 и 2. Найдите основание треугольника.

C5 Найти все положительные значения a, для которых система

$$\begin{cases} 16x^2 + (4 - 5a)(x^3 + x) - \dfrac{5}{4}a\left(x^2 + 1\right)^2 \leqslant 0, \\ \dfrac{4x}{x^2 + 1} = \dfrac{1 - y}{5y} + \dfrac{ay}{1 - y} + \dfrac{a}{4}, \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

C6 В возрастающей арифметической прогрессии $\{a_n\}$ суммы цифр членов тоже образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Может ли в прогрессии $\{a_n\}$ быть:

а) 11 членов;

б) бесконечное число членов?

Вариант 21 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 22

C1 а) Решите уравнение

$$\frac{6\cos x - 2}{6\cos^2 x - 11\cos x + 3} = -1.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S боковая сторона равна $6\sqrt{7}$, а сторона основания $6\sqrt{6}$. Точки M и K – середины ребер AD и AB соответственно. Точка E лежит на ребре SC. Угол между плоскостью MKE и плоскостью основания равен 30^o. Найти площадь сечения, проходящего через точки M, K и E.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5^x - 3^{x+1} > 2\cdot(5^{x-1} - 3^{x-2}), \\ \dfrac{2}{\dfrac{2}{\log_2 x} - 1} > -3. \end{cases}$$

C4 Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются внешним образом. Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

C5 Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$4(x - \sqrt{a\cdot 4^a})x + 4\,(4^a - 1) + a = 0$$

имеет корни.

C6 Рассматривается последовательность $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, \ldots$.

а) Существует ли арифметическая прогрессия длины 5 составленная из членов этой последовательности?

б) Можно ли составить арифметическую прогрессию бесконечной длины из этих чисел?

в) может ли в прогрессии быть 2013 членов?

Вариант 22 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 23

C1 а) Решите уравнение

$$\frac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-\pi; \pi/2]$.

C2 В пирамиде $SABC$ объемом 18 в основании лежит равнобедренный треугольник ABC. Боковая грань, проходящая через основание AB равнобедренного треугольника перпендикулярна плоскости основания пирамиды. На ребре SC отмечена точка E так, что прямая AE образует угол 45° с плоскостью основания, а объём пирамиды $EABC$ в два раза меньше объёма пирамиды $SABC$. Найти площадь сечения ABE, если треугольник ABE равносторонний.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 9^{2x+0,5} - 10\cdot 27^{2x/3} > 11/3, \\ \dfrac{3\log_{0,5} x}{2+\log_2 x} \geqslant 2\log_{0,5} x + 1. \end{cases}$$

C4 Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на диагонали BD и делит ее в отношении $2:3$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырехугольника $ABCM$ равна 60.

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + 2|x-a| \geqslant a^2$$

справедливо для всех действительных x.

C6 Автобусные билеты имеют номера от 000000 до 999999. Билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме последних трех его цифр. Докажите, что:

а) число всех счастливых билетов четно;

б) сумма номеров всех счастливых билетов делится на 999.

Вариант 23 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 24

C1 а) Решите уравнение

$$\frac{2(\cos x+\sin x)+1-\cos 2x}{2(1+\sin x)}=\sqrt{3}+\sin x.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-7;6]$.

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S и боковым ребром $4\sqrt{17}$ точки M и K – середины ребер SF и SC соответственно. Найти длину стороны основания, если угол между плоскостями AEK и BDM равен $\arccos(3/5)$.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{3}\cdot 4^x\leqslant\sqrt{2}\cdot 9^x,\\ \dfrac{\log_3 x-7}{\log_x 3-3}\leqslant 2.\end{cases}$$

C4 Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен 25, а вписанной в него окружности – 12. Найдите стороны треугольника.

C5 Найти все значения параметра α $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2)$ при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=3x^4+4x^3(\cos\alpha-\sin\alpha)-3x^2\sin 2\alpha$$

на отрезке $x\in[-\sin\alpha;\cos\alpha]$ принимает наименьшее значение.

C6 Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если любая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно

а) делится на $12!$;

б) делится на $13!$.

Вариант 24 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 25

C1 а) Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos 2x=1.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[0;\pi]$.

C2 Точка M – середина стороны BC основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро призмы равно $\sqrt{39}$, а сторона основания равна 12. Найти синус угла между прямой B_1M и плоскостью боковой грани ABB_1.

C3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1}\geqslant\dfrac{1}{1-2^{-x}}, \\ \log_{5x-4x^2}4^{-x}>0. \end{cases}$

C4 В окружность радиуса $\sqrt{10}$ вписана трапеция с основаниями 2 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

C5 При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 3x-\left(a+\frac{1}{2}\right)\sin 3x+\frac{a}{2}=0$$

имеет ровно три корня, расположенных на отрезке $\dfrac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi$?

C6 Группа психологов разработала тест, пройдя который, каждый человек получает оценку – число Q – показатель его умственных способностей (чем больше Q, тем больше способности). За рейтинг страны принимается среднее арифметическое значений Q всех жителей этой страны.

а) Группа граждан страны $\mathcal{A}$ эмигрировала в страну $\mathcal{B}$. Мог ли при этом у обеих стран вырасти рейтинг?

б) После этого группа граждан страны $\mathcal{B}$ (в числе которых могут быть и бывшие эмигранты из $\mathcal{A}$) эмигрировала в страну $\mathcal{A}$. Возможно ли, что рейтинги обеих стран опять выросли?

в) Группа граждан страны $\mathcal{A}$ эмигрировала в страну $\mathcal{B}$, а группа граждан $\mathcal{B}$ – в страну $\mathcal{C}$. В результате этого рейтинги каждой страны оказались выше первоначальных. После этого направление миграционных потоков изменилось на противоположное – часть жителей $\mathcal{C}$ переехала в $\mathcal{B}$, а часть жителей $\mathcal{B}$ – в $\mathcal{A}$. Оказалось, что в результате рейтинги всех трех стран опять выросли (по сравнению с теми, которые были после первого переезда, но до начала второго). (Так, во всяком случае, утверждают информационные агентства этих стран.) Может ли такое быть (если да, то как, если нет, то почему)? Предполагается, что за рассматриваемое время Q граждан не изменилось, никто не умер и не родился.

Вариант 25 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 26

C1 а) Решите уравнение

$$\log_2\left(5+3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin^2\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right).$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-\pi; 2\pi]$.

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AC=6$, $AA_1=8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. Найти, в каком отношении эта плоскость делит объем призмы, если известно, что $BM=MB_1$, а AN является биссектрисой угла CAC_1.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 7^{x-x^2/8}<7^{1-x}\cdot(\sqrt[8]{7})^{x^2}+6, \\ \log_x 2<\log_{6-x} 2. \end{cases}$$

C4 Периметр трапеции равен 112. Точка касания вписанной в трапецию окружности делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 8 и 18. Найдите основания этой трапеции.

C5 Найдите множество всех пар чисел (a,b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство $a(\cos x-1)+b^2=\cos(ax+b^2)-1$.

C6 В школе, где учатся Поля, Маня и Дуня, есть длинный коридор вдоль одной из стен которого расположен длинный ряд из n ячеек, занумерованных натуральными числами от 1 до n, закрывающихся на замки, в которых школьники могут хранить свои личные вещи. Однажды, придя в школу в выходной день, Поля обнаружила все ячейки открытыми. Она стала обходить ряд ячеек сначала до конца, закрывая на замок каждую вторую ячейку. Достигнув конца ряда, она развернулась и снова стала закрывать на замок каждую вторую ячейку из тех, которые ещё были открыты. Таким образом Поля продолжала обходить ряд и закрывать на замки ячейки до тех пор, пока осталась незакрытой одна ячейка.

Обозначим $f(n)$ номер последней открытой ячейки. Например, если количество ячеек $n=15$, то $f(15)=11$, как показано на рисунке.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
→	1	**2**	3	**4**	5	**6**	7	**8**	9	**10**	11	**12**	13	**14**	15	
	1		3		**5**		7		**9**		11		**13**		15	←
→			3				**7**				11				**15**	
			3								11					←

а) Найдите $f(50)$.

Докажите, что:

б) не существует натурального числа n, такого что $f(n)=2013$.

в) существует бесконечное множество натуральных чисел n, таких что $f(n)=f(50)$.

Вариант 26 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 27

C1 а) Решите уравнение

$$\log_2(2\sin^2 2x + 1) - 2\log_2 \cos x = 1 + \log_2 5.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-\pi; \pi]$.

C2 В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M, делящая отрезок SB в отношении $3:5$, считая от вершины S. Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3^x - 3^{-x+1/2} > \sqrt{3} - 1, \\ \dfrac{\log_{1/3}\left(\dfrac{1}{x^7}\right) + 2}{\log_9 x^6} \geqslant \dfrac{5}{\log_x 3} + 2. \end{cases}$$

C4 Две прямые, перпендикулярные стороне AC треугольника ABC, делят этот треугольник на три равновеликие части. Известно, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны между собой и равны стороне AC. Найдите углы треугольника ABC.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(a - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4}\right) \cdot \sqrt{8 - ax} = 0$$

имеет на отрезке $[-2; 3]$ нечетное число различных корней.

C6 Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

а) В мешке находятся 1 жёлтый, 1 зелёный и 2 красных шара. Из мешка случайным образом вынимают 2 шара разного цвета и заменяют одним шаром третьего цвета. Этот процесс продолжают до тех пор, пока все оставшиеся шары в мешке не окажутся одного цвета (возможно, что при этом в мешке останется один шар). Какого цвета шары (или шар) могут остаться в мешке?

б) В мешке находятся 3 жёлтых, 4 зелёных и 5 красных шаров. Какого цвета шары (или шар) могут остаться в мешке в конце после применения описанной в предыдущем пункте процедуры?

в) В мешке находятся 3 жёлтых, 4 зелёных и 5 красных шаров. Из мешка случайным образом вынимают 2 шара разного цвета и заменяют их двумя шарами третьего цвета. Можно ли, применяя эту процедуру многократно, добиться того, чтобы в мешке оказались шары одного цвета? Если можно, то какого цвета эти шары?

Вариант 28

C1 а) Решите уравнение
$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-3\pi/2, \pi]$.

C2 В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.

C3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \dfrac{2^x - 2^{2-x} - 3}{2^x - 2} \geqslant 0, \\ \log_4(3-3x)^2 \geqslant \log_2(x^2-1). \end{cases}$$

C4 Найти длины сторон AB и AC треугольника ABC, если $BC = 8$, а длины высот, проведенных к AC и BC, равны соответственно $6{,}4$ и 4.

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$$\log_{1/a}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\cdot\log_5\left(x^2+ax+6\right)+\log_a 3 \geqslant 0$$
имеет ровно одно решение.

C6 У Кости была кучка из 100 камешков. Каждым ходом он делил какую-то из кучек на две меньших, пока у него в итоге не оказалось 100 кучек по одному камешку.

а) возможно ли, что в какой -то момент в каких-то 30 кучках было в сумме ровно 60 камешков;

б) возможно ли, что в какой -то момент в каких-то 20 кучках было в сумме ровно 60 камешков;

в) мог ли Костя действовать так, чтобы ни в какой момент не нашлось 19 кучек, в которых в сумме ровно 60 камешков?

Вариант 28 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 29

C1 а) Решите уравнение

$$\log_{(-\sin x)}\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x + 1\right) = 0.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-3, 1]$.

C2 В треугольной пирамиде $ABCD$ плоские углы BAC, BAD и CAD при вершине A равны $2\pi/3$, $\pi/4$ и $3\pi/4$ соответственно. Определить угол между гранями BAD и CAD.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{4^x + 5}{2^x - 11} \geqslant -1, \\ \log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2 - 4x + 3) \leqslant 0. \end{cases}$$

C4 Окружности радиусов 2 и 1 касаются в точке A. Найдите сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого находится в точке A, а две другие лежат на разных окружностях.

C5 Найти все действительные значения параметра b, при которых для любого действительного a уравнение

$$\cos(a + ab + ax) + 4\cos(a^2 x) = 5b^2$$

имеет хотя бы одно решение.

C6 На окружности расставлены 999 чисел, каждое равно 1 или -1, причем не все числа одинаковые. Возьмем все произведения по 10 подряд стоящих чисел и сложим их.

а) Какая наименьшая сумма может получиться?

б) А какая наибольшая?

Вариант 29 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 30

C1 а) Решите уравнение

$$\left(\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3}-\operatorname{tg}x\right)\cdot\sqrt{6\cos\frac{15\pi}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}-\cos x-3}=0.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-\pi,\ 3\pi/2]$.

C2 Через середину диагонали куба проведена плоскость перпендикулярно этой диагонали. Найти отношение площади сечения куба данной плоскостью к площади полной поверхности куба.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^{x+3}-x^3\cdot 2^x\leqslant 16-2x^3, \\ \log_{0,1}(10^x-9)\geqslant x-1. \end{cases}$$

C4 Длины соседних сторон вписанного в окружность четырехугольника отличаются на 1. Длина наименьшей из них также равна 1. Найти радиус окружности.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых при любых значениях параметра b уравнение

$$|x-2|+b|2x+1|=a$$

имеет хотя бы одно решение.

C6 Рассматривается набор гирь, каждая из которых весит целое число граммов, а общий вес всех гирь равен 500 граммов. Такой набор называется правильным, если любое тело, имеющее вес, выраженный целым числом граммов от 1 до 500, может быть уравновешено некоторым количеством гирь набора, и притом единственным образом (тело кладется на одну чашку весов, гири – на другую; два способа уравновешивания, различающиеся лишь заменой некоторых гирь на другие того же веса, считаются одинаковыми).

а) Приведите пример правильного набора, в котором не все гири по одному грамму.

б) Сколько существует различных правильных наборов?

(Два набора различны, если некоторая гиря участвует в этих наборах не одинаковое число раз.)

Вариант 30 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 31

C1 а) Решите уравнение
$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=2(\sqrt{2}+1)\operatorname{ctg} x.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[\pi/4; 7\pi/4]$.

C2 Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Найдите площадь этого сечения, если длина бокового ребра равна 4, а угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равен 60°.

C3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} 2^{2x+1}-21\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+2}+2\geqslant 0, \\ \log_{49}(x+3)-\log_7(x+2)<0. \end{cases}$$

C4 Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, угол AOC равен 60°. Найдите угол AMC, где M – центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

C5 Найдите все числа, которые не могут быть корнями уравнения
$$4\sqrt{2x^4+x^3}=a\sqrt[4]{4-a^4}\cdot(x+4x^2-8)$$
ни при каком значении параметра a.

C6 а) В классе была дана контрольная. Известно, что по крайней мере две трети задач этой контрольной оказались трудными: каждую такую задачу не решили по крайней мере две трети школьников. Известно также, что по крайней мере две трети школьников класса написали контрольную хорошо: каждый такой школьник решил по крайней мере две трети задач контрольной. Могло ли такое быть?

б) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в её условии две трети на три четверти?

в) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в её условии две трети на семь десятых?

Вариант 31 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 32

С1 а) Решите уравнение
$$\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{2\sin x\cos x-1}=1.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-\pi,\pi]$.

С2 Правильную четырехугольную пирамиду пересекает плоскость, проходящая через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру. Площадь получившегося сечения в два раза меньше площади основания пирамиды. Найти отношение длины высоты пирамиды к длине бокового ребра.

С3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} 15\cdot\dfrac{4^{x-2}}{4^x-3^x}>1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^x, \\ \log_{x\sqrt[6]{3}}(3x^6+2x^2-6)>6. \end{cases}$$

С4 В ромбе $ABCD$ со стороной 2 и углом 60° проведены высоты CM и DK. Найдите длину отрезка MK.

С5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$9^{-x+1}\cdot 3^{x^2}+a^3+5a^2+a+\sqrt{2}=\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}+3$$
имеет единственное решение.

С6 Банкомат обменивает монеты: дублоны на пистоли и наоборот. Пистоль стоит s дублонов, а дублон – $1/s$ пистолей, где s – не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдаст в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее).

а) Может ли так быть, что обменяв сколько-то дублонов на пистоли, а затем обменяв полученные пистоли на дублоны, мы получим больше дублонов, чем было вначале?

б) Если да, то может ли случиться, что полученное число дублонов ещё увеличится, если проделать с ними такую же операцию?

Вариант 32 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 33

С1 а) Решите уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x + 7 = 2\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + 4\sin^2\frac{x}{2}.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[3;4]$.

С2 Треугольная пирамида $ABCD$ пересекается с плоскостью P по четырехугольнику $EFGH$ так, что вершины E и F лежат на ребрах AB и AC и длина отрезка EF равна 1. Известно, что плоскость P параллельна противоположным ребрам AD и BC, которые равны соответственно 4 и 2. Найти периметр четырехугольника.

С3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 2x > x \cdot \log_3\left(27 \cdot 9^{x-1} - 3^x + 3\right), \\ \log_{1/\sqrt{5}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) \geqslant -2. \end{cases}$$

С4 Окружности радиусов 3 и 8 касаются друг друга. Через центр одной из них проведены две прямые, каждая из которых касается другой окружности (точки A и B – точки касания). Найдите расстояние между точками A и B.

С5 Найти все значения a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2 + \left(2a^2 + 2\right)x - a^2 + 4a - 6}{x^2 + \left(a^2 + 5a - 5\right)x - a^2 + 4a - 6} < 0$$

не меньше 1.

С6 Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на банках стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может всем это доказать (т. е. обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашках. Докажите, что ему для этой цели

а) достаточно четырех взвешиваний;

б) недостаточно трех взвешиваний.

Комментарий. Отметим еще раз, что завхоз должен обосновать, что в какой банке находится для всех 80 банок.

Вариант 33 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 34

C1 а) Решите уравнение
$$4^{\sin x}+2^{5-2\sin x}=18.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\pi\right]$.

C2 Сечение SAB, проходящее через вершину S прямого кругового конуса, имеет площадь 60. Точки A и B, лежащие на окружности основания конуса, делят ее длину в отношении $1:5$. Найти объем конуса, если угол SAB равен $\arccos(2/\sqrt{29})$.

C3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \log_5\dfrac{5-x}{2-x}\geqslant\log_{25}\sqrt{(x-5)^4}-1,\\ \dfrac{128}{729}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{1/x}\geqslant\dfrac{4^x}{\sqrt[4]{81^{2x-1}}}.\end{cases}$$

C4 Две окружности касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Найдите радиус меньшей окружности, если известно, что длины отрезков $AM=28$, $MB=4$, а радиус большей окружности равен 20.

C5 При каких значениях параметра a уравнение
$$\sin^2(x+6)-(a-1)\sin(x+6)\cdot\sin\pi x+(a-1)\sin^2\pi x=0$$
имеет единственное решение?

C6 Среди любых десяти из шестидесяти школьников найдётся три одноклассника. Обязательно ли среди всех шестидесяти школьников найдётся

а) 15 одноклассников;

б) 16 одноклассников?

Вариант 34 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 35

C1 а) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 1} + \sin x = 0.$$

б) Найдите все корни на промежутке $[-3;\pi]$.

C2 В прямом круговом цилиндре, осевое сечение которого квадрат со стороной 12, хорда CD, равная $6\sqrt{3}$, перпендикулярна диаметру AB. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью CDA_1, если AA_1 – образующая цилиндра.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{x+1}\left(x^2+x-6\right) \geqslant 4, \\ \sqrt{-25x^2+15x-2}\cdot\left(8x^2-6x+1\right) \geqslant 0. \end{cases}$$

C4 Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые AB и DC пересекаются в точке M. Найдите площадь четырехугольника, если $\angle AMD = \alpha$, а радиусы окружностей, вписанных в треугольники BMC и AMD равны соответственно r и R.

C5 Найдите все значения b, при которых уравнение

$$3\cdot\sqrt[5]{x+2} - 16b^2\cdot\sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$$

имеет единственное решение.

C6 Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить всё жалованье между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдаёт Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если:

а) жалованье между отрядами Черномор распределяет как ему угодно;

б) жалованье между отрядами Черномор распределяет поровну?

Вариант 35 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 36

C1 а) Решите уравнение
$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{2}; 0\right]$.

C2 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 10$. Найдите расстояние между прямой CC_1 и прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой CM_1, где M_1 – середина стороны A_1B_1.

C3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 \cdot (10 - x^2)}}{x} \leqslant 2x + 5, \\ \sqrt{\log_9 (3x^2 - 4x + 2)} + 1 > \log_3 \left(3x^2 - 4x + 2\right). \end{cases}$$

C4 В треугольнике ABC на стороне AB расположена точка K так, что $AK : KB = 3 : 5$. На прямой AC взята точка E так, что $AE = 2CE$. Известно, что прямые BE и CK пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BOC равна 20.

C5 Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$
имеет ровно два корня.

C6 На плоскости даны 8 отрезков. Длина каждого отрезка является натуральным числом, не превосходящим 20. Пусть n – число различных треугольников, которые можно составить из этих отрезков. Один и тот же отрезок может использоваться для разных треугольников, но не может использоваться дважды для одного треугольника.

а) Может ли $n = 60$?

б) Может ли $n = 55$?

в) Найдите наименьшее возможное значение n, если среди данных отрезков нет трех равных.

Вариант 36 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 37

C1 **а)** Решите уравнение
$$\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, с вершиной S, стороной основания равной 6, и боковым ребром равным 5, проведена плоскость MKS через середины ребер AB и AD. В пирамиду вписан шар. Найти площадь сечения шара плоскостью MKS.

C3 Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} 3^x - 3^{-x+1/2} > \sqrt{3} - 1, \\ \log_{10-x^2}\left(\frac{16}{5}x - x^2\right) < 1. \end{cases}$$

C4 В равнобедренном треугольнике ABC на прямой BC отмечена точка D так, что угол CAD равен углу ABD. Найдите длину отрезка AD, если боковая сторона треугольника ABC равна 5, а его основание равно 6.

C5 Найти все значения параметра a, при которых неравенство
$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$
имеет единственное решение.

C6 На шести елках сидят шесть сорок – по одной на каждой елке. Елки растут с интервалом в 10 м. Если какая-то сорока перелетает с одной елки на другую, то какая-нибудь другая сорока обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении.

а) Могут ли все сороки собраться на одной елке?

б) А если сорок и елок семь?

в) А если елки стоят по кругу ?

Вариант 37 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 38

C1 а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2+\cos x} = 0.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

C2 Две параллельные плоскости, расстояние между которыми 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно $0,84$. Найдите радиус шара.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5x-12} + \dfrac{2x^2-6x+1}{x-3} \geqslant 2x, \\ \log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\dfrac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leqslant -2. \end{cases}$$

C4 Диагонали трапеции равны 13 и $\sqrt{41}$, а высота равна 5. Найдите площадь трапеции.

C5 При каких значениях параметра a, уравнение

$$\left(x^2 - x + a^2 + 1\right)^2 = 4a^2\left(5x^2 - x + 1\right)$$

имеет ровно три различных корня?

C6 Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1000 кг и 60 штук по 1500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Вариант 38 (полный, онлайн). Весь список

Вариант 39

C1 а) Решите уравнение

$$2(\cos -1)\sin 2x = 3\sin x.$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

C2 Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$, а высота пирамиды совпадает с ребром SA. Найти высоту пирамиды, если радиус вписанного в пирамиду шара равен 3, а сторона квадрата $ABCD$ равна 15.

C3 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}, \\ \log_{x-2}(3x - x^2) \leqslant 2. \end{cases}$$

C4 На окружности радиуса 3 с центром в вершине острого угла A прямоугольного треугольника ABC взята точка P. Известно, что $AC = 3$, $BC = 8$, а треугольники APC и APB равновелики. Найдите расстояние от точки P до прямой BC, если известно, что оно больше 2.

C5 Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(4\cos x - 3 - a) \cdot \cos x - 2,5\cos 2x + 1,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

C6 В ряд выписаны в порядке возрастания числа, делящиеся на 9 : $9, 18, 27, 36, \ldots$. Под каждым числом этого ряда записана сумма его цифр.

а) На каком месте во втором ряду впервые встретится число 81?

б) Что встретится раньше: четыре раза подряд число 27 или один раз число 36?

Вариант 39 (полный, онлайн). Весь список